

第8届 CPHO-S 物理竞赛联考

理论试题参考答案及评分标准

考试时间：2022 年 4 月 23 日 9:00-12:00

命题人：杨汝嘉 蔡一在 陈浩楠 严志豪

苏嘉稀 黄文杰 李瀚奕

审题人：蒋弘杰 徐嘉珺 朱信霖 刘子睿

甄林睿 罗钰涵 王梓人 鲁睿

一、(40 分)

在多电源多回路的复杂直流电路分析中，戴维南定理与诺顿定理有重要的应用。

戴维南定理又称等效电压源定理，是由法国科学家 L·C·戴维南于 1883 年提出的一个电学定理。由于早在 1853 年，亥姆霍兹也提出过本定理，所以又称亥姆霍兹—戴维南定理。

戴维南定理指出：一个含有独立线性电压源、独立线性电流源及线性电阻的线性网络的两端，可以用一个纯电动势和电阻的串联组合来等效，如图1.1所示。这个定理也可以推广到单频交流线性网络当中，其中电阻应该用复阻抗代替。类似地，其对偶定理，也即诺顿定理指出：一个含有独立线性电压源、独立线性电流源及线性电阻的线性网络的两端同样可以用一个纯电流源和电阻的并联组合来等效，如图1.2所示。

提示：无论负载为何，一个理想纯电流源均输出恒定大小电流，也就是说电流源两端的电压可以是任意大小的。

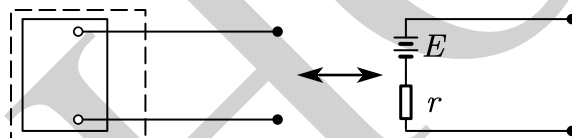


图1.1

(1) 通过戴维南定理与诺顿定理，可以对相同的网络给出两种不同的等效。写出两种等效电路外接负载电阻 R 时通过负载的电流大小，并建立两种等效间的变换关系，即用图1.2中的 I, r' 表达图1.1中的 E, r 。

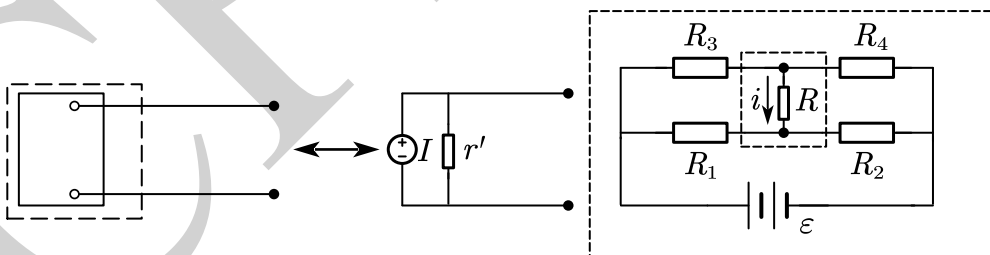


图1.2

图1.3

(2) 利用基尔霍夫定律求解如图1.3中的桥式电路涉及的计算十分复杂，利用戴维南定理可以简化桥式电路的计算。试计算两虚线方框之间，亦即作用于 R 两端电路的等效电压源参数 E_{eff} 和 r_{eff} ，并在此基础上计算通过 R 的电流大小 i 。

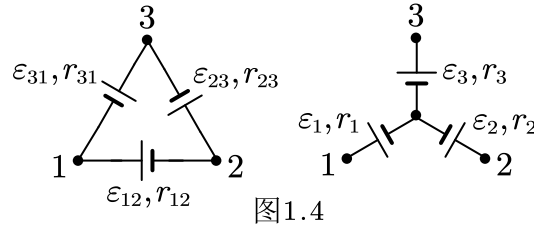


图1.4

(3) 下面再考虑三端网络的变换, 如图1.4所示。注意, 由于电路结构的特殊性, $\varepsilon_{1,2,3}$ 可以同时相差一个常数 C , 为方便起见, 取 $\varepsilon_3 = C$ 。

用 $\varepsilon_{12,23,31}, r_{12,23,31}$ 表示 $\varepsilon_{1,2,3}, r_{1,2,3}$, 并代入

$$\varepsilon_{12} = 2.00 \text{ V}, \varepsilon_{23} = 6.00 \text{ V}, \varepsilon_{31} = 3.00 \text{ V}, r_{12} = \frac{1}{2} \Omega, r_{23} = \frac{2}{3} \Omega, r_{31} = 3.00 \Omega$$

计算 $\varepsilon_{1,2,3}, r_{1,2,3}$ 的数值表达式, 保留至小数点后两位。

解: (1) 考虑电压源的情形

$$I_R = \frac{E}{R + r} \quad (1)$$

电流源的情形

$$I_R = \frac{Ir'}{R + r'} \quad (2)$$

与 R 无关, 得

$$E = Ir', r = r' \quad (3)$$

(2) 令 R 趋于无穷, 即考虑开路电压, 根据电路得

$$E_{eff} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} \varepsilon \quad (4)$$

令 R 趋于 0, 即考虑短路电流, 根据电路得

$$\frac{E_{eff}}{r_{eff}} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4} \varepsilon \quad (5)$$

解得:

$$r_{eff} = \frac{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} \quad (6)$$

可知:

$$i = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R(R_3 + R_4)(R_1 + R_2) + R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4} \varepsilon \quad (7)$$

(3) 根据戴维南定理, 三端网络内阻等效所有电源短路后的电阻网络电阻:

$$r_1 = \frac{r_{12} r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}} = 0.36 \Omega \quad (8)$$

$$r_2 = \frac{r_{12} r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}} = 0.08 \Omega \quad (9)$$

$$r_3 = \frac{r_{23} r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}} = 0.48 \Omega \quad (10)$$

三端网络电动势为 1, 2, 3 点均未接入外电路时的两两电势差。三角电路中电流为

$$I = \frac{\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}} \quad (11)$$

比对星形与三角形电路得

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon_{12} - r_{12} \frac{\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}} \quad (12)$$

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \varepsilon_{23} - r_{23} \frac{\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}} \quad (13)$$

$$\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \varepsilon_{31} - r_{31} \frac{\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}} \quad (14)$$

这三条式子中只有两条是独立的。得

$$\varepsilon_1 = 4.92 \text{ V} + C \quad (15)$$

$$\varepsilon_2 = 4.24 \text{ V} + C \quad (16)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 8 分：(1) (2) 式各 2 分，(3) 式 4 分；

第 (2) 问 16 分：(4) (5) (6) (7) 式各 4 分；

第 (3) 问 16 分：(8) (9) (10) (11) (15) (16) 式各 2 分，(12) (13) (14) 式任写其一得 2 分，任写两式得 4 分。

二、(40 分)

(1) 如图2.1所示建立坐标轴，一根长度为 L 的非匀质刚性细杆 AB 的质量线密度分布为：

$$\lambda = \frac{2mz}{L^2} \quad (2.1)$$

试求杆的质量 M ，质心坐标 z_c 以及对过其质心且垂直于杆的轴的转动惯量 I_c 。



图 2.1

(2) 如图2.2所示，初始时，该细杆静止放置在水平的刚性光滑桌面上，并平行于远处的竖直屏 P 。现有一质量为 m 的小球以垂直于杆的速度 v_0 与杆的 B 端发生完全弹性正碰，碰后瞬间拿走小球。

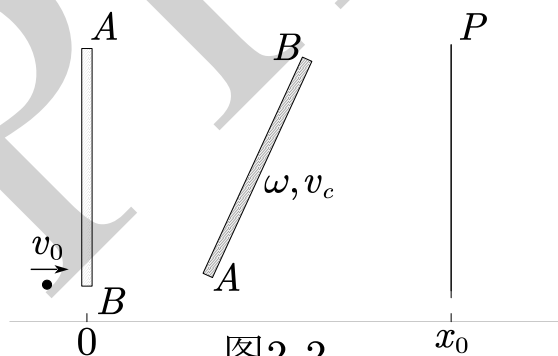


图 2.2

(2.1) 试求碰撞后杆的质心速度大小 v_c 和转动角速度大小 ω 。

(2.2) 在桌子上滑动一段时间后，非匀质杆将以 A 端或 B 端碰撞固定屏。如果屏的位置 x_0 是随机正实数，试求杆与屏 P 的首次相碰发生在 A 端和 B 端的概率之比 $\frac{P_A}{P_B}$ ，保留三位有效数字。

解：(1) 取 $z \rightarrow z + dz$ 的一段微元，其质量为

$$dm = \lambda dz = \frac{2mzdz}{L^2} \quad (1)$$

总质量为

$$M = \int_0^L \frac{2mzdz}{L^2} = m \quad (2)$$

其质心的坐标为

$$z_c = \frac{\int_0^L z \cdot \frac{2mzdz}{L^2}}{M} = \frac{2L}{3} \quad (3)$$

杆对过端点A且垂直于杆的轴的转动惯量为

$$I_A = \int_0^L z^2 \cdot \frac{2mzdz}{L^2} = \frac{1}{2}mL^2 \quad (4)$$

根据平行轴定理可求出杆对过其质心且垂直与杆的轴的转动惯量

$$I_c = I_A - Mz_c^2 = \frac{1}{18}mL^2 \quad (5)$$

(2) (2.1) 设碰撞时小球对杆的冲量为 J , 碰后小球的速度为 v , 对小球及杆列动量定理

$$J = Mv_c \quad (6)$$

$$-J = mv - mv_0 \quad (7)$$

对杆的质心列动量矩定理

$$J \cdot (L - z_c) = I_c \omega \quad (8)$$

由于是弹性碰撞, 所以体系能量守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \quad (9)$$

解得冲量大小为

$$J = \frac{1}{2}mv_0 \quad (10)$$

带入(6)(8)式可得

$$v_c = \frac{1}{2}v_0 \quad (11)$$

$$\omega = \frac{3v_0}{L} \quad (12)$$

(2.2) 以碰撞瞬间为时间零点, 可写出杆的两端点位置与时间的关系

$$x_A = v_c t - \frac{2L}{3} \sin(\omega t) = \frac{v_0 t}{2} - \frac{2L}{3} \sin\left(\frac{3v_0 t}{L}\right) \quad (13)$$

$$x_B = v_c t + \frac{L}{3} \sin(\omega t) = \frac{v_0 t}{2} + \frac{L}{3} \sin\left(\frac{3v_0 t}{L}\right) \quad (14)$$

引入参量 $\eta = \frac{3v_0 t}{L}$, (13)(14)式可改写为

$$y_A = \frac{x_A}{L} = \frac{\eta}{6} - \frac{2}{3} \sin \eta \quad (15)$$

$$y_B = \frac{x_B}{L} = \frac{\eta}{6} + \frac{1}{3} \sin \eta \quad (16)$$

如图2.3所示, 我们在同一坐标系中画出A端和B端的坐标 x 关于时间的函数

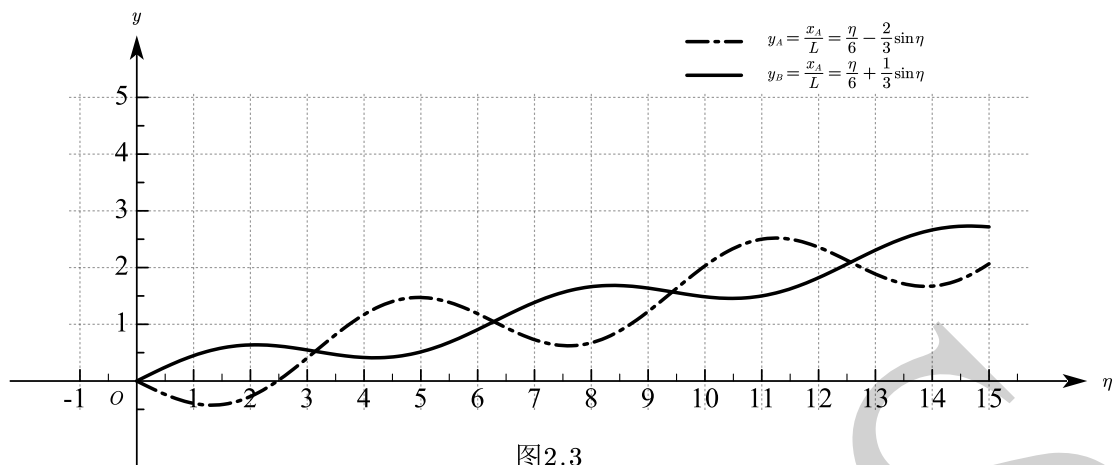


图 2.3

y_A 对 η 分别求一阶导和二阶导

$$\frac{dy_A}{d\eta} = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\cos\eta, \quad \frac{d^2y_A}{d\eta^2} = \frac{2}{3}\sin\eta \quad (17)$$

当一阶导数等于零且二阶导数小于零时, y_A 取极大值, 对应 η 的取值为

$$\eta_{An} = 2n\pi - \arccos\frac{1}{4}, n = 1, 2, 3 \dots \quad (18)$$

y_A 的一系列极大值为

$$y_{An} = \frac{2n\pi - \arccos\frac{1}{4} + \sqrt{15}}{6}, n = 1, 2, 3 \dots \quad (19)$$

同理可计算出 y_B 的一系列极大值为

$$y_{Bn} = \frac{n\pi}{3} - \frac{2\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}, n = 1, 2, 3 \dots \quad (20)$$

当 $y_{Bn} \leq y_0 = \frac{x_0}{L} \leq y_{An}$ 时, 端点 A 首次与屏 P 相碰; 当 $y_{An} \leq y_0 \leq y_{B(n+1)}$ 时, 端点 B 首次与屏 P 相碰, 对于任意的 n 均有

$$\delta y_A = y_{An} - y_{Bn} = \frac{2\pi}{9} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3} - \arccos\frac{1}{4}}{6} \quad (21)$$

$$\delta y_B = y_{B(n+1)} - y_{An} = \frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3} - \arccos\frac{1}{4}}{6} \quad (22)$$

所以 A 端和 B 端与屏 P 首次相碰的概率比为

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\delta y_A}{\delta y_B} = 3.94 \quad (23)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 8 分: (2) (3) (4) (5) 式各 2 分;

第 (2) 问 32 分:

第 (2.1) 小问 16 分: (6) (7) (8) (9) (11) (12) 式各 2 分, (10) 式 4 分;

第 (2.2) 小问 16 分: (13) (14) (17) (19) (20) 式各 2 分, (21) (22) 式各 1 分, (23) 式 4 分, 若没做变量代换, 步骤类似亦给过程分。

三、(40 分)

已知冰在熔点附近的比热容正比于绝对温度, 即 $C = \alpha T, \alpha = 5.5 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}^2)$, 又已知冰的熔点为 $T_0 = 273 \text{ K}$, 单位质量熔化热为 $\beta = 10^5 \text{ J/kg}$ 。

现有质量为 $m = 1 \text{ kg}$ 、温度为 T_0 的水, 质量同为 m 、温度为 $\tau = 272.9 \text{ K}$ 的冰以及理想可逆卡诺热机若干。不允许外界输入功, 只使用上述冰、水及热机, 分别设计完成下列任务的方案并代入数据计算数值解, 你无须证明你给出的方案的最优性:

(1) 对外输出尽可能多的机械功, 求出此机械功的最大值 W_m 。

(2) 将占总质量 $\frac{1}{n} = \frac{1}{100}$ 的冰尽可能地降温, 求出这部分冰能达到的最低温度 T_f 。

解: (1)

令 $t = T_0 - \tau = 0.1 \text{ K}$, 为了方便地计算此题, 先做一个估计:

冰升温至熔点吸热为

$$Q_c \approx \alpha m T_0 t = 0.15 \text{ kJ} \quad (1)$$

而水全部凝固能够放出的热是

$$Q_0 = \beta m = 100 \text{ kJ} \quad (2)$$

可见, 水凝固所能提供的热远远超过冰所能吸收的, 因此水不会完全凝固。

现取一个热机, 水作为高温热源且温度保持在 T_0 , 冰作为低温热源。设在某时刻冰的温度为 T , 吸热 dQ_2 , 则有

$$dQ_2 = \alpha m T dT \quad (3)$$

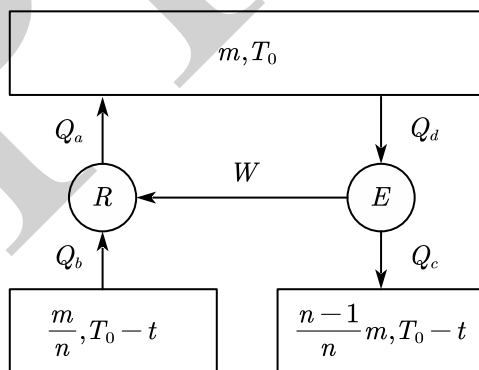
又由可逆卡诺热机的工作特点有

$$dW = \frac{T_0 - T}{T} dQ_2 \quad (4)$$

积分即可得到总功

$$W_m = \frac{1}{2} \alpha m t^2 = 0.0275 \text{ J} \quad (5)$$

(2) 取两个可逆卡诺热机, 构造如下图的工作模式:



冰水混合物的温度始终为 T_0 , 进而, 由于右侧冰升温到 T_0 后达到热平衡, 热机无法继续工作, 所以在假设下右侧冰不会融化。

设某时刻, 左侧冰温度为 T_1 , 放热 dQ_b 给热机, 则由卡诺定理

$$dW = \frac{T_0 - T_1}{T_1} dQ_b \quad (6)$$

又由于

$$dQ_b = -\alpha \frac{m}{n} T_1 dT_1 \quad (7)$$

联立得到

$$dW = -\frac{m}{n} \frac{T_0 - T_1}{T_1} \alpha T_1 dT_1 \quad (8)$$

若同时右侧冰温度为 T_2 ，吸热 dQ_c

$$dW = \frac{T_0 - T_2}{T_2} dQ_c \quad (9)$$

又由于

$$dQ_c = \alpha \frac{n-1}{n} m T_2 dT_2 \quad (10)$$

得到

$$dW = \frac{n-1}{n} m \frac{T_0 - T_2}{T_2} \alpha T_2 dT_2 \quad (11)$$

所以

$$-\frac{T_0 - T_1}{T_1} \frac{m}{n} \alpha T_1 dT_1 = \frac{T_0 - T_2}{T_2} \frac{n-1}{n} m \alpha T_2 dT_2 \quad (12)$$

末态右侧冰的温度是 T_0 ，设左侧冰温度为 $T_f = T_0 - t'$ ，则积分可得

$$nt^2 = t'^2 \quad (13)$$

代入数据得到

$$\begin{aligned} t' &= 1 \text{ K} \\ T_f &= 272 \text{ K} \end{aligned} \quad (14)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 15 分：数据论证水确实不会完全凝固 5 分，（3）（4）式各 3 分，（5）式 4 分；

第（2）问 25 分：（6）（7）（8）（9）（10）（11）（12）式各 3 分，（13）（14）式各 2 分。

四、（40 分）

本题将讨论带电刚体在重力—磁复合场中的回转运动。

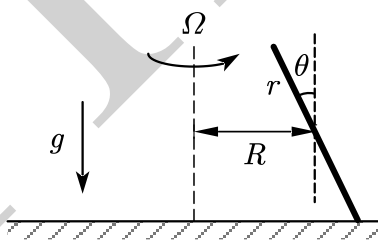


图4.1

（1）如图4.1所示，一个倾斜的粗糙匀质刚体薄圆盘在粗糙水平刚性地面上做纯滚动，其圆心以角速度 Ω 在水平面内做半径为 R 的圆周运动，盘面与竖直方向的夹角为 θ ，圆盘质量为 m ，半径为 r ，重力加速度为 g ，角速度 Ω 正方向如图所示。

（1.1）不难通过运动学知识推导得到，圆盘在地面参考系中的角速度等于其在转动系中的角速度 $\vec{\omega}$ 与转动系相对地系的角速度 $\vec{\Omega}$ 的矢量和，计算圆盘相对质心角动量水平分量 L_{\parallel} 的表达式。

提示：一般来说，刚体的角速度并不与角动量同方向，此时，需要把角速度在三个主轴做分解，分别算出刚体相对各主轴的角动量，然后矢量叠加。对于匀质圆盘而言，其三个主轴分别为圆盘中轴线，以及任意两个互相垂直的直径所在的轴。

（1.2）求解此时 Ω 的值 Ω_0 ，并代入以下数值，取国际单位制，保留至小数点后四位。

$$\frac{g}{r} = 1.000 \text{ s}^{-2}, \frac{R}{r} = 3, \theta = \frac{\pi}{6}.$$

(2) 磁场中的滚动圆盘。

(2.1) 证明：以地面某定点作为参考点，质量 m ，电荷 Q 都均匀分布的绝缘刚体在恒定匀强磁场 \vec{B} 中受洛伦兹力力矩可写成下列形式：

$$\vec{M}_L = \frac{Q}{2m} \vec{L} \times \vec{B} - \frac{d}{dt} \vec{L}^* \quad (4.1)$$

此式各项含义如下：

\vec{M}_L 是磁场的洛伦兹力对参考点产生的力矩， \vec{L} 是物体对参考点的角动量。 \vec{L}^* 是一个有角动量量纲的物理量，定义为：

$$\vec{L}^* = \sum_i \vec{r}_i \times \left(m_i \frac{Q\vec{B}}{2m} \times \vec{r}_i \right) \quad (4.2)$$

即，将刚体绕参考点角动量式中的 $\vec{\omega}$ 替换为 $\frac{Q}{2m} \vec{B}$ ，而其余保持不变。式(4.2)中 m_i 是第 i 个质点的质量， \vec{r}_i 是第 i 个质点相对参考点的位矢，该式同样可以写作积分形式。

注意：这个式子与我们熟知的磁矩力矩公式 $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ 不同。实际上，后者是前者的时间平均值，但在刚体在角速度方向有旋转对称性时无法表现出差别。

你可能会用到如下公式：

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (4.3)$$

(2.2) 现在在第(1)问的模型中给圆盘均匀带上电荷 Q ，忽略刚体内部、刚体与地面间可能发生的电荷转移，并在全空间加上竖直向上的恒定匀强磁场 B ，其余条件保持不变，重新求解 $\Omega = \Omega'$ 的表达式，并代入 $\frac{QB}{m} = 2.500 \text{ s}^{-1}$ 计算数值解，同样取国际单位制，保留至小数点后四位。

解：(1) (1.1)

设盘自转角速度为 ω ，则有运动学约束

$$\Omega(R + r \sin \theta) + \omega r = 0 \quad (1)$$

把角速度在两个主轴方向分解

$$\omega_1 = \omega + \Omega \sin \theta \quad (2)$$

$$\omega_2 = \Omega \cos \theta \quad (3)$$

接着求出对质心角动量分量

$$L_1 = \frac{1}{2} m r^2 \omega_1 \quad (4)$$

$$L_2 = \frac{1}{4} m r^2 \omega_2 \quad (5)$$

角动量的水平分量为

$$L_{\parallel} = L_1 \cos \theta - L_2 \sin \theta \quad (6)$$

代入可得到

$$L_{\parallel} = m r^2 \left(\frac{1}{2} \omega \cos \theta + \frac{1}{4} \Omega \cos \theta \sin \theta \right) = -\frac{1}{2} m r^2 \Omega \cos \theta \left(\frac{R}{r} + \frac{1}{2} \sin \theta \right) \quad (7)$$

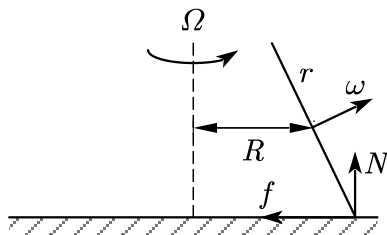


图 4.2

(1.2)

如图 4.2 所示，设地面给盘支持力 N ，摩擦力 f ，则有质心运动定理：

$$N = mg \quad (8)$$

$$f = m\Omega^2 R \quad (9)$$

对质心的角动量定理有

$$\Omega L_{\parallel} = fr \cos \theta - Nr \sin \theta \quad (10)$$

代入得到

$$\frac{1}{2}mr^2\Omega^2 \cos \theta \left(\frac{R}{r} + \frac{1}{2} \sin \theta \right) = -m\Omega^2 Rr \cos \theta + mgr \sin \theta \quad (11)$$

最终解出

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{4g \tan \theta}{6R + r \sin \theta}} = \pm 0.3533 \text{ s}^{-1} \quad (12)$$

(2)

(2.1)

待证之式为

$$\vec{M}_L = \frac{Q}{2m} \vec{L} \times \vec{B} - \frac{d}{dt} \vec{L}^*$$

将刚体均匀划分，第 i 个质点质量 m_i ，电荷量 q_i ，则

$$\frac{Q}{m} = \frac{q_i}{m_i}$$

原式中各量表达为

$$\vec{M}_L = \sum_i \vec{r}_i \times (q_i \vec{v}_i \times \vec{B})$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

$$\vec{L}^* = \sum_i \vec{r}_i \times \left(m_i \frac{Q\vec{B}}{2m} \times \vec{r}_i \right)$$

接下来有两种证法：

证法一：

用三重矢积的展开式，得

$$\begin{aligned} \vec{M}_L &= \sum_i q_i \left((\vec{r}_i \cdot \vec{B}) \vec{v}_i - (\vec{r}_i \cdot \vec{v}_i) \vec{B} \right) \\ \frac{Q}{2m} \vec{L} \times \vec{B} &= \frac{1}{2} \sum_i q_i \left((\vec{r}_i \cdot \vec{B}) \vec{v}_i - (\vec{B} \cdot \vec{v}_i) \vec{r}_i \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}^* = \frac{1}{2} \sum_i q_i (2(\vec{r}_i \cdot \vec{v}_i) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{v}_i) \vec{r}_i - (\vec{r}_i \cdot \vec{B}) \vec{v}_i)$$

代入得

$$\vec{M}_L = \frac{Q}{2m} \vec{L} \times \vec{B} - \frac{d}{dt} \vec{L}^*$$

因此原式成立。(也可以用三重矢积的轮换式证明)

证法二:

构造另一情景: 该刚体在无磁场的空间内在外力矩 \vec{M} 下运动, 考虑地系和绕地系角速度 $\vec{\Omega}$ 的转动系之间的关系。

地系角动量定理

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

转动系角动量定理

$$\vec{M}' = \left(\frac{d\vec{L}'}{dt} \right)'$$

由转动系惯性力公式, 力矩关系

$$\vec{M}' = \vec{M} + \sum_i \vec{r}_i \times (2m_i \vec{v}_i' \times \vec{\Omega} - m_i \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i))$$

分别写出地系和转动系中的角动量

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) \\ \vec{L}' &= \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i') \end{aligned}$$

转动系速度变换

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i$$

得到角动量关系

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_2$$

其中

$$\vec{L}_2 = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i)$$

求导, 并考虑到转动系导数变换, 得

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{L}'}{dt} \right)' + \vec{\Omega} \times \vec{L}' + \left(\frac{d\vec{L}_2}{dt} \right)' + \vec{\Omega} \times \vec{L}_2$$

与前面的力矩关系和两个角动量定理联立得

$$\sum_i 2m_i \vec{r}_i \times (\vec{v}_i' \times \vec{\Omega}) = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i \times (\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i)) - \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i)) \right) + \vec{L}' \times \vec{\Omega} - \left(\frac{d\vec{L}_2}{dt} \right)'$$

由三重矢积的展开式

$$\vec{r}_i \times (\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i)) = -(\vec{r}_i \cdot \vec{\Omega})(\vec{\Omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i))$$

因此上面式子等号右边第一项为 0。(也可以用三重矢积的轮换式证明)

所以得到任意 $\vec{\Omega}$, 任意参考系成立的恒等式

$$\sum_i 2m_i \vec{r}_i \times (\vec{v}_i' \times \vec{\Omega}) = \vec{L}' \times \vec{\Omega} - \left(\frac{d\vec{L}_2}{dt} \right)'$$

取构造的该问题中的转动系为原题中的系，并令

$$\vec{\Omega} = \frac{Q\vec{B}}{2m}$$

则

$$\vec{L}_2 = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \left(\frac{Q\vec{B}}{2m} \times \vec{r}_i \right) = \vec{L}^*$$

得

$$\sum_i q_i \vec{r}_i \times (\vec{v}_i \times \vec{\Omega}) = \vec{L} \times \frac{Q\vec{B}}{2m} - \frac{d\vec{L}^*}{dt}$$

所以

$$\vec{M}_L = \frac{Q}{2m} \vec{L} \times \vec{B} - \frac{d}{dt} \vec{L}^*$$

(2.2) 先求出 $\left| \frac{d}{dt} \vec{L}^* \right|$

$$\left| \frac{d}{dt} \vec{L}^* \right| = \Omega \frac{1}{4} m r^2 \frac{QB}{2m} \sin \theta \cos \theta \quad (13)$$

其余大致思路不变，有改动的几个式子如下

$$f = m\Omega^2 R + Q\Omega RB \quad (14)$$

$$\Omega L_{\parallel} = f r \cos \theta - N r \sin \theta - \frac{QB}{2m} L_{\parallel} - \Omega \frac{1}{4} m r^2 \frac{QB}{2m} \sin \theta \cos \theta \quad (15)$$

其他方程不变，最终代入得到

$$\frac{1}{2} m r^2 \Omega^2 \left(\frac{3R}{r} + \frac{1}{2} \sin \theta \right) + \frac{1}{4} Q B r^2 \Omega \frac{5R}{r} - m g r \tan \theta = 0 \quad (16)$$

解出

$$\Omega = \frac{-\frac{QB}{4m} \frac{5R}{r} \pm \sqrt{\left(\frac{QB}{4m} \frac{5R}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{3R}{r} + \frac{1}{2} \sin \theta \right) \tan \theta \frac{g}{r}}}{\left(\frac{3R}{r} + \frac{1}{2} \sin \theta \right)} = 0.0598 \text{ s}^{-1} \text{ 或 } -2.0868 \text{ s}^{-1} \quad (17)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 20 分：

第 (1.1) 小问 7 分：(1) 式 3 分，(7) 式 4 分；

第 (1.2) 小问 13 分：(8) 式 2 分，(9) 式 3 分，(10) (12) 式各 4 分；

第 (2) 问 20 分：

第 (2.1) 小问 8 分：证明无误即给 8 分满分，否则不得分；

第 (2.2) 小问 12 分：(13) 式 3 分，(14) 式 2 分，(15) 式 3 分，(17) 式 4 分。

五、(40 分)

在示波器、电视显像管等电真空器件中都需要将电子束聚焦，以便在荧光屏上形成清晰的光点，这时常采用静电透镜来达到此目的。使具有旋转对称形状的金属电极系统中的每一个电极拥有一定的电位，就可以产生旋转对称的静电场。由于与光学中透镜对光线的折射相

似，这样的电场可以使电子束的运动方向发生偏折，故把这样的电极系统称为静电透镜。下面各题目中，均考虑傍轴近似，且所有角度均为小角度，不考虑相对论效应。

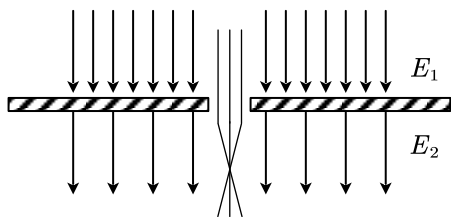


图5.1

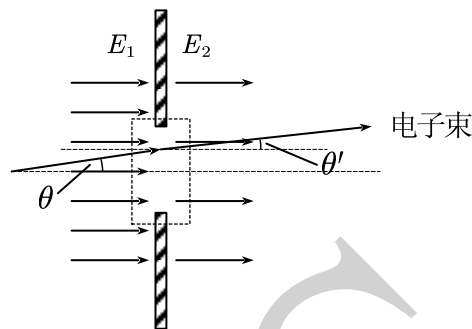


图5.2

(1) 如图5.1，带电量为 $-e$ 的电子以能量 E_0 从无限远处以很高的速度傍轴入射静电透镜。已知瞄准距离远小于透镜尺寸，静电透镜物方电场强度为 E_1 ，像方电场强度为 E_2 ，且 $E_1 > E_2$ ，试求透镜焦距 f_0 。已知轴向电场对轴向动量产生的影响是小量，电子束尺寸远小于电极中心空洞的尺寸。

(2) 在实际应用中，常常使用多个静电透镜组成透镜系统，从而达到更好的调控效果。

(2.1) 如图5.2所示，先考虑单个透镜对电子束的偏转。与轴线夹角为 θ 的电子束经焦距为 f 的静电透镜折射时，与透镜在距光心 r 处相交，试求电子束通过透镜后再经过距离 l 时与轴线的距离 r' 和与轴线的夹角 θ' 。

(2.2) 现在考虑无穷多个静电透镜对电子束的约束。通过第一个透镜前电子束与轴线夹角为 θ_1 ，通过第一个透镜时与光心的距离为 r_1 ，相邻透镜的间距均为 l_0 ，透镜参数与第(1)问相似，即电极两端的似匀强场电场强度之差 $\Delta E = E_1 - E_2$ 为定值。试求能使电子束在一般性的初始条件下被约束（即 r_i 不会在很大的透镜数后趋于无穷）的 E_0 的取值范围，答案请用 E_1, E_2 表示，不允许出现 ΔE 。假设电子束无能量损失，且不考虑轴向电场对电子的加速效应。
数学提示：对于二阶线性常系数递推方程

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$$

记 x_1, x_2 为下列特征方程的两根：

$$x^2 + px + q = 0$$

如果 $x_1 \neq x_2$ ，那么，递推方程的通解是

$$a_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n$$

如果 $x_1 = x_2$ ，那么，递推方程的通解是

$$a_n = (C_1 + C_2 n) x_1^n$$

其中 C_1, C_2 为任意常数。

解：(1) 离轴线距离为 r 的电子束通过圆孔时，电子受到径向电场力的作用，由柱坐标下动量定理，

$$-eE_r = \frac{dp_r}{dt} \quad (1)$$

由于电子速度很高，近似有

$$dz = v_0 dt \quad (2)$$

其中 v_0 为入射初速度，满足

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (3)$$

所以总径向动量变化（积分在入射到出射的全过程上进行，下同）

$$\Delta p_r = \int -eE_r dt = -\frac{e}{v_0} \int E_r dz \quad (4)$$

由高斯定理,

$$E_1 \pi r^2 = E_2 \pi r^2 + \int E_r \cdot 2\pi r dz \quad (5)$$

于是,

$$\Delta p_r = -\frac{e}{v_0} \cdot \frac{r}{2} (E_1 - E_2) = -\frac{er(E_1 - E_2)}{2v_0} \quad (6)$$

偏转角度 (向内为正)

$$\Delta \theta = \frac{-\Delta p_r}{p_z} = \frac{-\Delta p_r}{mv_0} = \frac{er(E_1 - E_2)}{2mv_0^2} = \frac{er(E_1 - E_2)}{4E_0} \quad (7)$$

透镜焦距

$$f_0 = \frac{r}{\Delta \theta} = \frac{4E_0}{e(E_1 - E_2)} \quad (8)$$

(2) (2.1) 由傍轴近似, 与轴线夹角为 θ 的电子束经焦距为 f 的透镜折射后, 将经过透镜焦平面上距轴线 $r_0 = f\theta$ 处。由几何关系

$$\begin{cases} r' = \left(1 - \frac{l}{f}\right)r + l\theta \\ \theta' = -\frac{1}{f}r + \theta \end{cases} \quad (9)$$

(2.2) 设电子束经第 n 个透镜折射前距离轴线的距离为 r_n , 与轴线夹角为 θ_n , 则由 (2.1) 有以下递推关系

$$\begin{cases} r_{n+1} = \left(1 - \frac{l_0}{f_0}\right)r_n + l_0\theta_n \\ \theta_{n+1} = -\frac{1}{f_0}r_n + \theta_n \end{cases} \quad (10)$$

从而消去 θ_n 有

$$r_{n+2} - \left(2 - \frac{l_0}{f_0}\right)r_{n+1} + r_n = 0 \quad (11)$$

特征方程为

$$x^2 - \left(2 - \frac{l_0}{f_0}\right)x + 1 = 0 \quad (12)$$

记其两根为 x_1, x_2 , 则由韦达定理,

$$x_1 x_2 = 1 \quad (13)$$

当 $x_1 = x_2$ 时, 通解为

$$r_n = (C_1 + C_2 n)x_1^n \quad (14)$$

根据韦达定理, 只能是 $x_1 = x_2 = 1$ 或 $x_1 = x_2 = -1$, 所以在一般性的初始条件下 $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$ 发散。

当 $x_1 \neq x_2$ 时, 通解为

$$r_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n \quad (15)$$

其中 C_1, C_2 为常数。始终受约束要求

$$|x_1| \leq 1 \text{ 且 } |x_2| \leq 1 \quad (16)$$

根据韦达定理, 只能是

$$|x_1| = |x_2| = 1 \quad (17)$$

所以, 综上所述, 要求判别式小于零, 即

$$\Delta = \left(2 - \frac{l_0}{f_0}\right)^2 - 4 < 0 \quad (18)$$

因此,

$$E_0 > \frac{el_0(E_1 - E_2)}{16} \quad (19)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 20 分: (1) (2) (3) (4) 式各 2 分, (5) (6) (7) (8) 式各 3 分;

第 (2) 问 20 分:

第 (2.1) 小问 5 分: (9) 式正确任一条 3 分, 全部正确 5 分;

第 (2.2) 小问 15 分: (10) 式正确任一条 3 分, 全部正确 5 分, (11) (12) (15) (18) (19) 各 2 分。

六、(40 分)

古斯-汉森位移是光学中一种十分有趣的现象, 它描述的是光束在两种不同介质的界面而发生全反射时, 反射光束在入射平面内相对于几何光学路径存在的一个位移。它在 1947 年由古斯和汉森首次通过实验发现。本题将探究古斯-汉森位移的相关问题, 以下问题只考虑 p 偏振分量。

(1) 如图 6.1 所示, 由菲涅耳公式可知, 光的 p 偏振分量在表面的复反射率可以写为:

$$\tilde{E}'_{1p} = \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} \tilde{E}_{1p} \quad (6.1)$$

若发生全反射, 入射光束与出射光束之间会形成相位差, 试求出这个反射相位差 $\varphi_{\text{反}}(i_1)$ 。

提示: 当 $\sin \theta$ 大于 1 时, $\cos \theta$ 为复数, 记 $\sqrt{-1} = i$, 即 $\cos \theta = i\sqrt{\sin^2 \theta - 1}$, 事实上这样做才能保证透射波振幅是随深度指数衰减而不是指数增长的。

(2) 一束真空中波长为 λ 的光束从上方介质入射时, 平面电磁波的电场可写为:

$$E_0 e^{i \left[\frac{2\pi}{\lambda(n)} (x \sin \theta + y \cos \theta) - \omega t \right]} \quad (6.2)$$

其中 θ 为光束传播方向与 x 轴之间的夹角。

当发生全反射时, 可观测到古斯-汉森位移, 如图 6.2 所示。这种现象可通过相位稳定理论来解释: 对于该固定路径而言, 即在 δ 保持恒定时, 相对于无全反射相移、亦无古斯-汉森位移的整体相位变化对 i_1 的微商为零。试求古斯-汉森位移随入射角的变化关系 $\delta(i_1)$ 。

(3) 在全反射时的下半平面, 波矢的 y 分量将为纯虚数, 这个分量将会在时谐电磁波公式当中造成沿着这个方向的衰减。透射深度定义为振幅值衰减到它在表层值的 e^{-1} 的垂直距离, 试求出全反射时的透射深度 h_2 , 然后计算反射光线与入射光线的交点深度 h_1 和透射深度 h_2 之比的表达式, 并取 $n_1 = 1.5, n_2 = 1.0, i_1 = 75^\circ$ 计算数值以证明两者数量级相同。

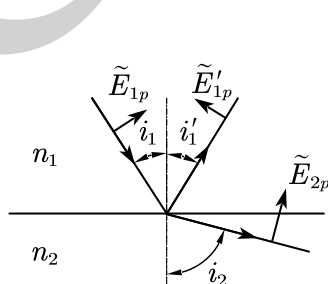


图 6.1

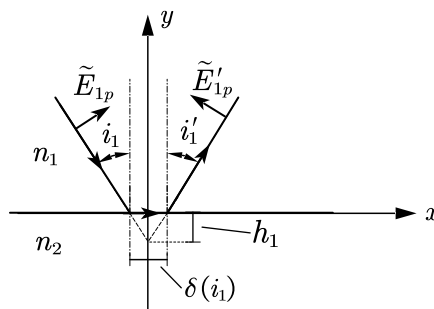


图 6.2

解：（1）由折射定律

$$\begin{aligned} n_1 \sin i_1 &= n_2 \sin i_2 \\ \sin i_2 &= \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \\ \cos i_2 &= \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

发生全发射时有

$$\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 > 1$$

所以

$$\cos i_2 = i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)^2 - 1} \quad (2)$$

代入菲涅尔公式并整理

$$\tilde{E}'_{1p} = \tilde{E}_{1p} \exp \left(-2i \tan^{-1} \frac{n_1 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)^2 - 1}}{n_2 \cos i_1} \right) \quad (3)$$

故反射导致的相位差为

$$\varphi_{\text{反}}(i_1) = 2 \tan^{-1} \frac{n_1 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)^2 - 1}}{n_2 \cos i_1} \quad (4)$$

（2）因为对于光束传播造成的总相位差

$$\varphi_{\text{总}} = \varphi_{\delta} - \varphi_{\text{反}}$$

其中

$$\varphi_{\delta} = \frac{2\pi n_1}{\lambda} \sin i_1 \delta(i_1)$$

则有

$$\varphi_{\text{总}} = 2 \tan^{-1} \frac{n_1 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)^2 - 1}}{n_2 \cos i_1} - \frac{2\pi n_1}{\lambda} \sin i_1 \delta(i_1) \quad (5)$$

由题意

$$\frac{d\varphi_{\text{总}}}{di_1} = 0 \quad (6)$$

代入后求解有

$$\delta(i_1) = \frac{\lambda \tan i_1}{\pi \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)^2 - 1}} \frac{n_2}{n_1^2 \sin^2 i_1 - n_2^2 \cos^2 i_1} \quad (7)$$

（3）在介质 n_2 中波矢为

$$\vec{k} = \frac{2\pi n_2}{\lambda} (\sin i_2 \hat{x} + \cos i_2 \hat{y}) \quad (8)$$

则振幅随深度的变化为

$$\tilde{E}(\vec{r}) = \tilde{E}(0)e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (9)$$

代入 (1) (3) 式

$$\tilde{E}(\vec{r}) = \tilde{E}(0)\exp\left(i\frac{2\pi n_1}{\lambda}x\sin i_1\hat{x} - \frac{2\pi n_2}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)^2 - 1}y\hat{y}\right) \quad (10)$$

当振幅衰减为 $1/e$ 时

$$h_2 = \frac{\lambda}{2\pi n_2 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)^2 - 1}} \quad (11)$$

入射出射光线交点深度

$$h_1 = \frac{\delta}{2\tan i_1} = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)^2 - 1}} \frac{n_2}{n_1^2 \sin^2 i_1 - n_2^2 \cos^2 i_1} \quad (12)$$

故

$$\frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 i_1 - \cos^2 i_1\right)^{-1} \quad (13)$$

代入数值有

$$\frac{h_1}{h_2} \approx 0.4921 \quad (14)$$

数量级相同，得证。

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 16 分：(1) (2) (3) (4) 式各 4 分。

第 (2) 问 10 分：(5) (7) 式各 4 分，(6) 式 2 分。

第 (3) 问 14 分：(8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) 式各 2 分。

七、(40 分)

“When the stars exploded billion years ago they formed everything that is this world. Everything we know is stardust.”

1956 年，California Institute of Technology 的地球化学家 Claire Patterson 采用陨石的铅同位素定年法测得地球的准确年龄： $4.55 \pm 0.07 \text{ Ga}$, $1 \text{ Ga} = 1 \times 10^9 \text{ a}$ ，这与目前公认的地球年龄——45.43 亿年十分接近。他的研究结果 *“Age of meteorites and the earth (陨石与地球的年龄)”* 发表于地球化学与宇宙化学学报上。本题意在通过简单的模型构建计算放射性粒子数目的概率分布，从而为地球化学与宇宙化学的研究提供工具。

用盖革计数器探测陨石中放射性粒子的衰变。以开始探测为时间零点，记在 $(0, t)$ 内探测到的粒子总数为 $N(t)$ ，它是一个取值离散的随机变量。记分布列为 P ，即记 $N(t) = k (k \in \mathbb{Z})$ 的概率为 $P(N(t) = k)$ 。已知“探测到粒子”事件满足以下三个条件：

- i. 在 $t \in (0, +\infty)$ 内，每时每刻都有可能发生事件；
- ii. 在不同时刻发生的事件相互独立；
- iii. 任一无限短的一段时间内发生一次事件的概率与时间间隔成正比，比例系数为 λ ，

在无穷短的时间段内发生两次及以上事件的概率可忽略不计。

(1) 本问先研究具有以上三个性质的随机变量的一般性质：

(1.1) 试求分布列 $P(N(t) = k)$ 。

你可能会用到二项分布公式：

某独立实验仅有 A, B 两种互斥的结果，每次实验结果为 A 的概率均为 p 。记变量 x 为进行

n 次实验后获得结果 A 的次数，则变量 x 满足参数为 (n, p) 的二项分布：

$$P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}, \binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

以及自然对数的定义式：

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(1.2) 试求 $N(t)$ 的平均值 $\langle N \rangle$ 、方差 $\sigma_N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ 和相对标准偏差 $\frac{\sigma_N}{\langle N \rangle}$ ，并简述 t 很大时相对偏差的行为。

(2) 下面用以上结论讨论一具体问题：

(2.1) 已知 ^{14}C 具有 β 放射性，每一个 ^{14}C 原子会衰变为一个 β 粒子和另一个原子，请写出 ^{14}C 原子衰变的核反应方程。

(2.2) 已知 ^{14}C 的半衰期为 τ ，活植物体内 ^{14}C 和 ^{12}C 的质量比为常数 $\alpha \ll 1$ ， ^{14}C 的摩尔质量为 μ ，阿伏伽德罗常数为 N_A 。现有一质量为 m 的古代植物碳样品，用探测效率趋于100%的盖革计数器探测 β 粒子，探测到的粒子总数为 N_1 。且探测总时间 $t_1 \ll \tau$ ，即该段时间内“发生一次衰变”事件满足上面的三个性质。试求该植物样品的年龄 t_0 和年龄的相对不确定度

$\frac{\sigma_{t_0}}{t_0}$ 。忽略时间测量的不确定度。

解：(1)

(1.1)

解法一：

将给定时间 t 分为 n 份等长时间段，每段时间 $n \rightarrow \infty$ 时可看作小量，从而可以忽略每段时间中探测到的粒子为二个及以上的概率。则探测到 k 个粒子的概率

$$P(N(t) = k) = C_n^k \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \quad (1)$$

而

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (3)$$

且 k 为有限量，与 n 相比可忽略不计，故

$$P(N(t) = k) = C_n^k \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (4)$$

解法二：

先以一次事件的发生时刻为时间零点，计算经过时间间隔 t 仍未发生第二次事件的概率

$p(t)$ ：

由乘法原理，

$$p(t + dt) = p(t)(1 - \lambda dt) \quad (1*)$$

得微分方程

$$\frac{dp}{dt} = -\lambda p \quad (2*)$$

经过无限短时间不会发生第二次事件，因此得初始条件

$$p(0) = 1 \quad (3*)$$

代入，分离变量，积分

$$\int_0^p \frac{dp'}{p'} = \int_0^t -\lambda dt \quad (4*)$$

得

$$p(t) = e^{-\lambda t} \quad (5*)$$

再计算在 t 到 $t + dt$ 时间内发生第二次事件的概率 $f(t)dt$ ，即计算两次事件的时间间隔的概率分布函数 $f(t)$ ：

由加法原理，

$$p(t) = p(t + dt) + f(t)dt \quad (6*)$$

得关系

$$f(t) = -\frac{dp(t)}{dt} \quad (7*)$$

求导得

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (8*)$$

（推导过平均自由程的同学会很熟悉上面的步骤，在那里，此处的“事件”指碰撞）

最后，以开始观测为时间零点，计算在 0 到 t_0 时间内发生 k 次事件的概率 $P(N(t_0) = k)$ ：设第 i 次事件到第 $i + 1$ 次事件的时间间隔为 t_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, k$)，开始观测到第 1 次事件的时间间隔为 t_1 。由题意，前 k 次事件发生时刻在 t_0 之前，第 $k + 1$ 次事件发生时刻在 t_0 之后，因此

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + \dots + t_k < t_0 \\ t_1 + t_2 + \dots + t_k + t_{k+1} > t_0 \\ t_i > 0, i = 1, 2, \dots, k + 1 \end{cases} \quad (9*)$$

由于事件相互独立，由加法原理，

$$P(N(t_0) = k)$$

$$\begin{aligned} &= \iiint \dots \int_{\substack{t_1 + t_2 + \dots + t_k < t_0 \\ t_1 + t_2 + \dots + t_k + t_{k+1} > t_0}}^{k+1 \text{ 重积分}} f(t_1)f(t_2)\dots f(t_k)f(t_{k+1}) dt_1 dt_2 \dots dt_k dt_{k+1} \\ &= \iiint \dots \int_{\substack{t_1 + t_2 + \dots + t_k < t_0 \\ t_1 + t_2 + \dots + t_k + t_{k+1} > t_0}}^{k+1 \text{ 重积分}} \lambda^{k+1} e^{-\lambda(t_1 + t_2 + \dots + t_k + t_{k+1})} dt_1 dt_2 \dots dt_k dt_{k+1} \\ &= \iiint \dots \int_{t_1 + t_2 + \dots + t_k < t_0}^{k \text{ 重积分}} \lambda^{k+1} e^{-\lambda(t_1 + t_2 + \dots + t_k)} \left(\int_{t_0 - (t_1 + t_2 + \dots + t_k)}^{+\infty} e^{-\lambda t_{k+1}} dt_{k+1} \right) dt_1 dt_2 \dots dt_k \\ &= \lambda^k e^{-\lambda t_0} \iiint \dots \int_{t_1 + t_2 + \dots + t_k < t_0}^{k \text{ 重积分}} dt_1 dt_2 \dots dt_k \end{aligned}$$

可以计算得到

$$P(N(t_0) = k) = \frac{(\lambda t_0)^k e^{-\lambda t_0}}{k!} \quad (10*)$$

其中最后一步用到了 k 维棱锥的体积公式

$$\iiint \dots \int_{t_1 + t_2 + \dots + t_k < t_0}^{k \text{ 重积分}} dt_1 dt_2 \dots dt_k = \frac{t_0^k}{k!}$$

一种证法是数学归纳法：

记

$$V_k(t_0) = \iiint \dots \int_{t_1 + t_2 + \dots + t_k < t_0}^{k \text{ 重积分}} dt_1 dt_2 \dots dt_k$$

归纳奠基：

$$V_1(t_0) = \int_{t_1=0}^{t_0} dt_1 = t_0 = \frac{t_0^1}{1!}$$

归纳递推:

假设

$$V_{k-1}(t_0) = \iiint \cdots \int_{t_1+t_2+\cdots+t_{k-1} < t_0}^{k-1 \text{ 重积分}} dt_1 dt_2 \cdots dt_{k-1} = \frac{t_0^{k-1}}{(k-1)!}$$

那么,

$$\begin{aligned} V_k(t_0) &= \iiint \cdots \int_{t_1+t_2+\cdots+t_k < t_0}^{k \text{ 重积分}} dt_1 dt_2 \cdots dt_k \\ &= \int_{t_1=0}^{t_0} \iiint \cdots \int_{t_2+t_3+\cdots+t_k < t_0-t_1}^{k-1 \text{ 重积分}} dt_2 dt_3 \cdots dt_k dt_1 \\ &= \int_{t_1=0}^{t_0} V_{k-1}(t_0-t_1) dt_1 = \int_{t_1=0}^{t_0} \frac{(t_0-t_1)^{k-1}}{(k-1)!} dt_1 = \frac{t_0^k}{k!} \end{aligned}$$

所以原式成立。

另一种证法是以两种方式计算积分

$$I = \int_{t_1=0}^{+\infty} \int_{t_2=0}^{+\infty} \cdots \int_{t_k=0}^{+\infty} e^{-\lambda(t_1+t_2+\cdots+t_k)} dt_1 dt_2 \cdots dt_k$$

(用高斯积分推导过 k 维球表面积和体积公式的同学会很熟悉这种操作)

一种方式为:

$$I = \int_{t_1=0}^{+\infty} e^{-\lambda t_1} dt_1 \int_{t_2=0}^{+\infty} e^{-\lambda t_2} dt_2 \cdots \int_{t_k=0}^{+\infty} e^{-\lambda t_k} dt_k = \frac{1}{\lambda^k}$$

另一种方式为: 先记

$$\iiint \cdots \int_{t_0 \leq t_1+t_2+\cdots+t_k \leq t_0+dt_0}^{k \text{ 重积分}} dt_1 dt_2 \cdots dt_k = f(t_0) dt_0$$

于是

$$I = \int_{t_0=0}^{+\infty} \iiint \cdots \int_{t_0 \leq t_1+t_2+\cdots+t_k \leq t_0+dt_0}^{k \text{ 重积分}} e^{-\lambda t_0} dt_1 dt_2 \cdots dt_k = \int_{t_0=0}^{+\infty} e^{-\lambda t_0} f(t_0) dt_0$$

两者相等, 从而

$$\int_{t_0=0}^{+\infty} e^{-\lambda t_0} f(t_0) dt_0 = \frac{1}{\lambda^k}$$

待定系数法, 令

$$f(t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t_0^n$$

由参数求导或分部积分易得

$$\int_{t_0=0}^{+\infty} e^{-\lambda t_0} t_0^n dt_0 = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$

代入得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{\lambda^{n+1}} = \frac{1}{\lambda^k}$$

比对等号两边 λ 的相同次幂的系数得

$$a_n = \frac{1}{(k-1)!} \delta_{n,k-1}$$

于是

$\iiint \cdots \int_{t_0 \leq t_1 + t_2 + \cdots + t_k \leq t_0 + dt_0} \overset{k \text{重积分}}{dt_1 dt_2 \cdots dt_k} = f(t_0) dt_0 = \frac{t_0^{k-1}}{(k-1)!} dt_0$
对 t_0 积分得

$$\iiint \cdots \int_{0 < t_1 + t_2 + \cdots + t_k < t_0} \overset{k \text{重积分}}{dt_1 dt_2 \cdots dt_k} = \frac{t_0^k}{k!}$$

解法三:

记

$$P(N(t) = k) = p_k(t)$$

只需求出 $p_k(t)$ 的递推关系和边界条件, 即可确定 $p_k(t)$ 。

先看边界条件。与解法二的 (1*) 式同理, 由乘法原理,

$$p_0(t + dt) = p_0(t)(1 - \lambda dt) \quad (1 **)$$

得微分方程

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0 \quad (2 **)$$

不经过时间不会发生事件, 因此得初始条件

$$p_0(0) = 1 \quad (3 **)$$

代入, 分离变量, 积分

$$\int_0^{p_0} \frac{dp'_0}{p'_0} = \int_0^t -\lambda dt \quad (4 **)$$

得

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (5 **)$$

再看递推关系。由加法原理和乘法原理,

$$p_n(t + dt) = p_{n-1}(t)\lambda dt + p_n(t)(1 - \lambda dt) \quad (6 **)$$

得微分方程

$$\frac{dp_n}{dt} = \lambda(p_{n-1} - p_n) \quad (7 **)$$

由一阶线性微分方程的通解, 得

$$p_n(t) = e^{\int -\lambda dt} \left(\int e^{\int \lambda dt} \lambda p_{n-1}(t) dt + C \right) \quad (8 **)$$

不经过时间不会发生事件, 因此得初始条件

$$p_n(t) = 0, n \geq 1 \quad (9 **)$$

代入通解确定积分常数得

$$p_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t dt' e^{\lambda t'} p_{n-1}(t') \quad (10 **)$$

迭代得

$$p_n(t_1) = \underbrace{\left(\lambda e^{-\lambda t_1} \int_0^{t_1} dt_2 e^{\lambda t_2} \right) \left(\lambda e^{-\lambda t_2} \int_0^{t_2} dt_3 e^{\lambda t_3} \right) \cdots \left(\lambda e^{-\lambda t_n} \int_0^{t_n} dt_{n+1} e^{\lambda t_{n+1}} \right)}_{n \text{个}} e^{-\lambda t_{n+1}} \quad (11 **)$$

化简得

$$p_n(t_1) = \lambda^n e^{-\lambda t_1} \underbrace{\int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \cdots \int_0^{t_n} dt_{n+1}}_{n \text{个}} \quad (12 **)$$

由 k 维棱锥的体积公式 (推导见解法二后面), 得

$$p_n(t_1) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t_1}}{n!} \quad (13 **)$$

即

$$P(N(t) = k) = p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (14 **)$$

所以, 最终, 我们有

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

这其实是著名的泊松分布。

(1.2) 对于 $N(t)$ 的平均值和方均值, 有三种解法:

解法一:

$N(t)$ 的平均值

$$\langle N \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \times k = \lambda t e^{-\lambda t} \times \frac{d}{d(\lambda t)} \left[e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \right] = \lambda t \quad (7)$$

$N(t)$ 的方均值

$$\langle N^2 \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \times k^2 = \lambda t e^{-\lambda t} \times \frac{d}{d(\lambda t)} \left\{ \lambda t \times \frac{d}{d(\lambda t)} \left[e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \right] \right\} \quad (8)$$

$$\langle N^2 \rangle = \lambda t (1 + \lambda t) \quad (9)$$

解法二:

$N(t)$ 的平均值

$$\langle N \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \times k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} e^{-\lambda t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t \quad (7)$$

为求 $N(t)$ 的方均值, 先求

$$\begin{aligned} \langle N(N-1) \rangle &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \times k(k-1) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-2)!} e^{-\lambda t} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{k+2}}{k!} e^{-\lambda t} = (\lambda t)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = (\lambda t)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

于是, $N(t)$ 的方均值

$$\langle N^2 \rangle = \langle N(N-1) \rangle + \langle N \rangle = \lambda t (1 + \lambda t) \quad (9)$$

解法三:

$N(t)$ 的矩生成函数

$$M_N(\alpha) = \langle e^{\alpha N} \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{\alpha k} \times \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{\lambda t(e^\alpha - 1)} \quad (7)$$

求导得 $N(t)$ 的平均值

$$\langle N \rangle = \frac{\partial M_N}{\partial \alpha}(0) = \lambda t \quad (8)$$

求两次导得 $N(t)$ 的方均值

$$\langle N^2 \rangle = \frac{\partial^2 M_N}{\partial \alpha^2}(0) = \lambda t (1 + \lambda t) \quad (9)$$

上面求出了 $N(t)$ 的平均值和方均值，故方差

$$\sigma_N^2 = \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \lambda t \quad (10)$$

相对偏差平均值

$$\frac{\sigma_N}{\langle N \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\lambda t}} \quad (11)$$

t 很大时，相对偏差趋于零。

(2) (2.1) 由电荷数守恒和质量数守恒， $^{14}_6\text{C}$ 会变成 $^{14}_7\text{N}$ ，所以衰变的核反应方程为



(2.2)

该植物存活时体内 C-14 原子个数

$$N_0 = \frac{\alpha m}{\mu} N_A \quad (13)$$

以该植物死亡时刻为时间零点，体内 C-14 原子个数随时间的变化关系

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{\tau}} \quad (14)$$

求导得单位时间的衰变次数

$$-\frac{dN}{dt}(t) = \frac{N_0 \ln 2}{\tau} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{\tau}} \quad (15)$$

因为 $t_1 \ll \tau$ ，所以

$$\frac{N_1}{t_1} = -\frac{dN}{dt}(t_0) = \frac{N_0 \ln 2}{\tau} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t_0}{\tau}} \quad (16)$$

解得年龄

$$t_0 = \tau \log_2 \left(\frac{\alpha m N_A t_1}{\mu \tau N_1} \ln 2 \right) \quad (17)$$

由不确定度传递公式，

$$\sigma_{t_0} = \left| \frac{dt_0}{dN_1} \right| \sigma_{N_1} \quad (18)$$

求导得

$$\left| \frac{dt_0}{dN_1} \right| = \frac{\tau}{N_1 \ln 2} \quad (19)$$

由 (1) 中结论，

$$\sigma_{N_1} = \sqrt{N_1}$$

于是

$$\sigma_{t_0} = \frac{\tau}{\sqrt{N_1} \ln 2}$$

相对不确定度

$$\frac{\sigma_{t_0}}{t_0} = \frac{1}{\sqrt{N_1} \ln \left(\frac{\alpha m N_A t_1}{\mu \tau N_1} \ln 2 \right)} \quad (20)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 25 分：

第 (1.1) 小问 10 分：解法一 (1) (4) 式各 4 分，(2) (3) 式各 1 分，解法二 (2*)

(5*) (7*) (8*) 式各 1 分，(9*) 式 2 分，(10*) 式 4 分，解法三 (5**) (10**) (12**) 式各 2 分，(14**) 式 4 分；

第(1.2)小问 15 分：解法一、解法二、解法三均为(7)(8)(9)式各 4 分，(10)式 2 分，简述 1 分；

第(2)问 15 分：(12)(13)(17)(19)(20)式各 3 分。

八、(40 分)

在太阳系中绕太阳运动的物体，将会受到太阳辐射的光压作用。由于相对论效应，物体反射后的辐射光压将会对物体产生阻力，导致物体不断减速，最终落入太阳，这种现象被称为坡印廷-罗伯森效应。在太空中运行的飞行器受到该效应的影响会慢慢偏离轨道，因此对该现象的研究在航天领域十分重要。

在太阳系中有一质量为 m 的飞行器绕太阳做半径为 r 的圆周运动。飞行器张开一面积为 S 的太阳帆以反射太阳光。太阳质量为 M ，半径为 R ，可将其视作表面温度为 T 的理想黑体。万有引力常量为 G ，斯特藩-玻尔兹曼常数为 σ ，真空中光速为 c ，已知 $r \gg R$ 。

(1) 不考虑除了光子的极端相对论效应以外的相对论效应，太阳帆对太阳光的反射为镜面反射。太阳帆法线始终对准太阳。试计算由于太阳辐射而使太阳帆受到的力 F_1 。

(2) 在第(1)问的条件下，试计算飞行器的运行速度 v 。

(3) 由于飞行器是在其本征参考系下将太阳帆表面的法线对准太阳辐射方向，这导致在太阳系下，太阳帆的法线方向与太阳帆-太阳连线方向并不重合，而是有微小夹角 γ 。考虑最低阶相对论修正，保留至 v/c 的一阶项，试计算该夹角 γ 。结果中不能包含 v 。

(4) 由于 γ 的存在，反射光会对飞行器产生阻力。试计算阻力大小 f ，保留至 v/c 的一阶项。最终结果中不能包含 v 。

解：(1) 单位时间到达太阳帆的辐射功率

$$P = 4\pi R^2 \sigma T^4 \cdot \frac{S}{4\pi r^2} = \frac{\sigma T^4 R^2 S}{r^2} \quad (1)$$

辐射被完全反射，产生压力

$$F_1 = \frac{2P}{c} \quad (2)$$

代入 P 得到

$$F_1 = \frac{2\sigma T^4 R^2 S}{cr^2} \quad (3)$$

(2) 飞行器还受到万有引力。对飞行器列径向动力学方程

$$\frac{GMm}{r^2} - \frac{2\sigma T^4 R^2 S}{cr^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (4)$$

解得飞行器速度

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r} - \frac{2\sigma T^4 R^2 S}{mcr}} \quad (5)$$

(3) 某一时刻，设一惯性系 S 系相对太阳系静止，其原点在飞行器所处位置，飞行器速度方向为 x 轴，太阳-飞行器连线方向为 y 轴。惯性系 S' 系以恒定速度 v 相对于 S 系沿 x 轴方向运动。此时刻，到达飞行器的太阳光在 S 系下的速度分量为

$$c_x = 0 \quad (6)$$

$$c_y = c \quad (7)$$

在 S' 系下，由洛伦兹速度变换公式，光的速度分量为

$$c'_x = -v \quad (8)$$

$$c'_y = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (9)$$

太阳帆在 S' 系下法线沿该光线方向，换回至 S 系，由于洛伦兹尺缩因子中的 $\frac{v^2}{c^2}$ 是高阶小量可略去，因此可忽略太阳帆的尺缩效应。夹角为

$$\gamma \approx \tan \gamma \approx \frac{c'_x}{c'_y} \approx \frac{v}{c} \quad (10)$$

代入 v 表达式，得到

$$\gamma = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{GM}{r} - \frac{2\sigma T^4 R^2 S}{mcr}} \quad (11)$$

(4) 在太阳系下，由于太阳帆法线并不沿飞行器-太阳连线方向。反射光将对太阳帆造成阻力。在考虑最低阶相对论修正的情况下，仅保留至 $\frac{v}{c}$ 的一阶项，太阳系下可认为光遵循非相对论条件下的镜面反射定律。

$$f = \frac{P}{c} \sin 2\gamma \quad (12)$$

小量近似

$$f \approx \frac{2P\gamma}{c} \quad (13)$$

代入 γ 、 P 表达式得到

$$f = \frac{2\sigma T^4 R^2 S}{c^2 r^2} \sqrt{\frac{GM}{r} - \frac{2\sigma T^4 R^2 S}{mcr}} \quad (14)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 10 分：(2) 式 2 分，(1) (3) 式各 4 分；

第 (2) 问 7 分：(4) 式 4 分，(5) 式 3 分；

第 (3) 问 13 分：(6) (7) 式各 1 分，(8) (9) (10) (11) 式各 2 分，提到忽略太阳帆的尺缩效应 3 分；

第 (4) 问 10 分：(12) (13) 式各 2 分，(14) 式 4 分，提到太阳系下光线遵循非相对论情形镜面反射公式 2 分。